Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 15, No. 3 (2025) 271–280.

Paper Type: Original Article

Optimization for Enhancing the Quality of the Queueing Model Family $\{M/E_r/1, r \in N\}$ Based on the Cost Function, Probability of System Stationary, and Customer Satisfaction Under a Finite Time Horizon

Shahram Yaghoobzadeh Shahrastani[1], Amrollah Jafari[1], Iman Makhdoom[1,*]

[1] Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran; yagoubzade@pnu.ac.ir; amrollahjafari@pnu.ac.ir; Makhdoom@pnu.ac.ir.

Citation:

Received: 18 April 2025 *Revised: 22 June 2025* *Accepted: 11 July 2025*	Yaghoobzadeh Shahrastani, Sh., Jafari, A., & Makhdoom, I. (2025). Optimization for enhancing the quality of the queueing model family $\{M/E_r/1, r \in N\}$ based on the cost function, probability of system stationary, and customer satisfaction under a finite time horizon. *Journal of Quality Engineering and Management*, *15*(3), 271-280.

Abstract

Purpose: This study aims to determine the optimal model within the family of queueing models $\{M/E_r/1, r \in N\}$, where interarrival times follow an exponential distribution and service times follow an Erlang distribution, under a finite stopping time TTT. The significance of this research lies in its application to optimizing the performance of service systems using queueing theory.

Methodology: To select the optimal model, a cost function and a performance metric, namely the average customer satisfaction level, are first defined. Subsequently, a new index, named ORS, is introduced based on the cost function, average customer satisfaction, and the system's stability probability. The optimal model is identified as the one with the highest ORS value. Numerical analysis is employed to demonstrate the procedure for determining the optimal model.

Findings: The numerical results indicate that the ORS index is an effective criterion for evaluating and comparing different queueing models, enabling optimal model selection by incorporating multiple performance aspects.

Originality/Value: The main contribution of this research is the introduction of the ORS index as a novel and comprehensive measure for optimal model selection in queueing systems. This approach can enhance service system design and improve customer satisfaction levels in practical applications.

Keywords: Erlang distribution, Cost function, Average degeree of customer satisfaction, Family of modela $\{M/E_r/1, r \in N\}$, Stationary probability.

Corresponding Author: Makhdoom@pnu.ac.ir

10.48313/jqem.2025.537574.1567

Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۵، شماره (۳)، (۲۰۲۵)، ۲۸۰-۲۷۱

نوع مقاله: پژوهشی

بهینه‌سازی در جهت ارتقا کیفیت خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{M/E_r/1 , r \in N\}$ بر اساس تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم و رضایت مشتری تحت یک زمان توقف

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی[۱]، امراله جعفری[۱]، ایمان مخدوم[۱،*]

[۱]گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: این مطالعه با هدف تعیین مدل بهینه برای خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{M/E_r/1, r \in N\}$ با زمان‌های بین ورود نمایی و زمان‌های سرویس ارلانگ، تحت زمان توقف *TTT*، انجام شده است. اهمیت این پژوهش در کاربردهای عملی مدل‌های صف در بهینه‌سازی عملکرد سیستم‌های خدماتی نهفته است.

روش‌شناسی پژوهش: برای انتخاب مدل بهینه، ابتدا تابع هزینه و معیاری تحت عنوان "متوسط درجه رضایت مشتری" برای خانواده مدل‌های مذکور تعریف می‌شود. سپس شاخصی جدید به نام *ORS* بر حسب تابع هزینه، متوسط درجه رضایت مشتری و احتمال پایایی سیستم معرفی می‌گردد. به‌منظور تعیین مدل بهینه، مدلی که دارای مقدار بزرگ‌تری از شاخص *ORS* باشد، به عنوان مدل مطلوب انتخاب می‌شود. در ادامه، از تحلیل عددی برای تبیین نحوه انتخاب مدل بهینه استفاده شده است.

یافته‌ها: نتایج تحلیل عددی نشان داد که شاخص *ORS* می‌تواند معیاری مناسب برای ارزیابی و مقایسه مدل‌های مختلف صف باشد و انتخاب مدل بهینه را با توجه به معیارهای چندگانه تسهیل نماید.

اصالت/ارزش افزوده علمی: معرفی شاخص *ORS* به عنوان معیاری نوین در انتخاب مدل بهینه در سیستم‌های صف از نوآوری‌های اصلی این پژوهش است که می‌تواند در طراحی کارآمدتر سیستم‌های خدماتی و ارتقای رضایت مشتریان موثر باشد.

کلیدواژه‌ها: توزیع ارلانگ، تابع هزینه، متوسط درجه رضایت مشتری، خانواد مدل $\{M/E_r/1, r \in N\}$، احتمال پایایی.

۱- مقدمه

خانواده مدل‌های دارای توزیع ارلانگ موردتوجه نویسندگان مختلف قرار گرفته و پارامترهای مختلفی در این‌گونه مدل‌ها توسط نویسندگان متعددی به روش‌های آماری برآورد شده است. برآورد پارامترها و بررسی خواص ریاضی آن‌ها در مدل $M/E_k/1$ توسط گوپتا [1] و برآورد زمان انتظار متقاضیان در سیستم صف‌بندی $E_r / M / 1$ توسط فیسچر [2] صورت گرفته است. تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $E_r / M / 1$ و $E_r / M / c$

توسط ویپر [3]، تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های *M/E_k /1* و *M/H_k /1* توسط اینسوا و همکاران [4] و برآورد پارامتر شدت ترافیک مدل *M/E_k /1* توسط هاریش‌چاندرا و سوبارائو [5] انجام شد. تحقیقی هم در زمینه کنترل کیفیت در مدل *M/E_k /1* توسط جاین و دهیانی [6] صورت گرفته شد. برآورد بیزی پارامترها در مدل *M/E_r /1* توسط چادهوری و میتی [7]، برآورد بیزی پارامترها در انواع مدل‌های صف‌بندی توسط جوس و مانوهاران [8]، برآورد پارامترها در مدل *M/E_r /1* به روش‌های درستنمایی ماکسیمم و بیزی توسط وایدیاناتان و چاندراساخار [9] و برآورد بیزی پارامترها با استفاده از توزیع پیشین دو متغیره توسط دیپچی و جوس [10] به‌دست آورده شد. به تازگی مخدوم و یعقوب زاده شهرستانی [11] برآورد بیزی در مدل صف‌بندی *M/M/1* را تحت داده‌های سانسورشده نوع دوم بر اساس داده‌های فازی به‌دست آورده‌اند. کیفیت سیستم‌های صف‌بندی $M/M\,m/K$ با استفاده از بهینه‌سازی تابع هزینه سیستم توسط مخدوم و یعقوب زاده شهرستانی [12] بررسی شد. یک برآورد آماری بهینه برای پارامتر شدت ترافیک در مدل صف‌بندی *M/M/1/K* بر اساس معیارهای فازی و غیر فازی توسط مخدوم [13] ارایه شد.

در این مقاله برای مدل M/E_r /1 معیاری به نام متوسط درجه رضایت مشتری، بر اساس متوسط تعداد مشتری‌های موجود در صف و سیستم تابع هزینه و سپس بر اساس تابع هزینه و متوسط درجه رضایت مشتری و احتمال پایایی سیستم، شاخصی جدید به نام نرخ کارایی سیستم به معرفی می‌شوند تا بر اساس آن مدل بهینه تعیین گردد. ساختار مقاله به این صورت است. در بخش دوم، توزیع ارلانگ و سیستم صف‌بندی M/E_r /1 معرفی و بعضی از معیارهای ارزیابی این سیستم‌ها ارایه شد. در بخش سوم، فرم کلی تابع هزینه و شاخص *ORS* معرفی و نحوه بهینه‌سازی سیستم‌های M/E_r /1 توضیح داده شد. در بخش چهارم با استفاده از تحلیل عددی، مدل بهینه برای خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ تعیین شد.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش توزیع ارلانگ و مدل صف‌بندی M/E_r /1 به‌طور مختصر معرفی و سایر مطالب موردنیاز در مقاله ارایه می‌شود.

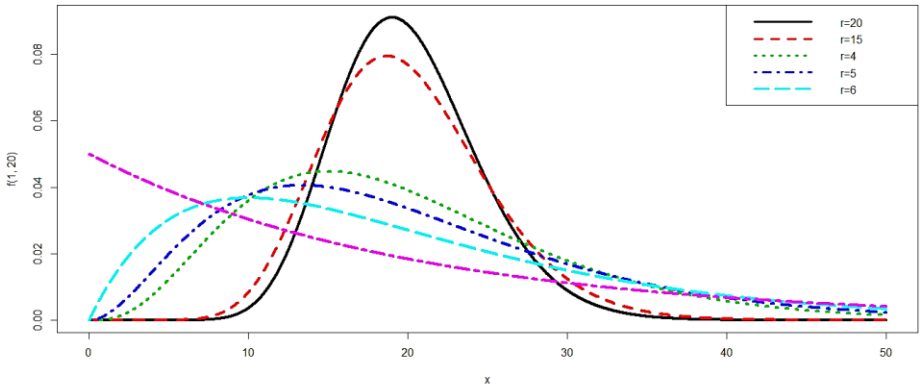
۲-۱- توزیع ارلانگ

ساده‌ترین مدل‌های صف‌بندی آن‌هایی هستند که بر اساس متغیر تصادفی نمایی ساخته شده‌اند. خاصیت بی‌حافظه بودن این متغیر تصادفی، تحلیل مدل‌های نمایی را بسیار آسان می‌سازد؛ بنابراین، بیشتر مسایل صف‌بندی در چارچوب مدل‌های نمایی فرمول‌بندی می‌شوند؛ اما همه آن‌ها در این قالب جا داده نمی‌شود. متغیرهای تصادفی مانند مدت‌زمان سرویس و یا زمان بین دو ورود مشتری‌ها در سیستم‌های صف‌بندی از توزیع‌های متنوعی پیروی می‌کنند که توزیع ارلانگ یکی از معروف‌ترین آن‌هاست.

تعریف ۱- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به‌صورت

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0, \lambda > 0, r \in N.$$

توزیع ارلانگ به فرم فوق در این مقاله با نماد $E_r(r, \lambda)$ نشان داده می‌شود. میانگین این متغیر تصادفی $\frac{r}{\lambda}$ و واریانس آن $\frac{r}{\lambda^2}$ است. در حالت خاص اگر $r = 1$ باشد، توزیع ارلانگ به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. با تغییر r در صورت ثابت ماندن میانگین، توابع مختلفی به‌دست می‌آید که در **شکل ۱** نشان داده شده است. با توجه به **شکل ۱** مشاهده می‌شود که مجموعه توابع ارلانگ بسیار متنوع هستند و داده‌های آماری بسیاری از متغیرهای تصادفی با یکی از توابع این مجموعه منطبق می‌شود. به‌عنوان‌مثال اگر داده‌های آماری متغیر تصادفی مدت‌زمان سرویس (خدمت) در یک سیستم صف‌بندی در اختیار باشد به کمک این داده‌ها میانگین و واریانس این متغیر تصادفی تخمین زده می‌شود. با توجه به متنوع بودن توزیع ارلانگ، امکان زیادی وجود دارد که داده‌های موردنظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگ همین خاصیت تنوع آن است که بسیاری از متغیرهای تصادفی در قالب آن جای داده می‌شود.



شکل ۱- نمودار توزیع ارلانگ با rs متفاوت با فرض ثابت ماندن میانگین.

Figure 1- Erlang distribution diagram with different r assuming the mean remains constant.

اگرچه توزیع ارلانگ از نظر محاسباتی در حد توزیع نمایی نیست، اما در مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به متغیر تصادفی نمایی نزدیک‌تر است و در مواردی با تبدیل آن به متغیرهای تصادفی نمایی از سهولت محاسباتی خاصیت بی حافظگی استفاده می‌کند. برای آن‌که بتوان از خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی استفاده کرد، می‌توان متغیر تصادفی ارلانگ را به چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه کرد. به‌عنوان‌مثال متغیر تصادفی ارلانگ با $r = 2$ به‌صورت مجموع دو متغیر تصادفی نمایی نوشته می‌شود. مزیت عمده آن نسبت به توزیع نمایی این است که در عمل پدیده‌های تصادفی بسیاری برحسب آن بیان می‌شود.

۲-۲- مدل صف‌بندی $M / E_r / 1$

در این سیستم مشتری‌ها با آهنگ λ وارد می‌شوند که زمان بین ورودها یعنی $\{U_k, k \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر λ و زمان‌های سرویس یعنی $\{V_k, k \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع $E_r(r, r\mu)$ و با تابع چگالی احتمال

$$f(v, \mu, r) = \frac{(r\mu)^r}{\Gamma(r)} v^{r-1} e^{-r\mu v} \,.\, v > 0, \mu > 0, r \in N,$$

هستند. در این بخش λ، μ و r پارامترهای نامعلوم درنظر گرفته می‌شوند. اگر بر اساس روگری و همکاران [14] توزیع پیشین λ توزیع $Gamma(v_1, a)$ با $v_1 \in N$ و $a > 0$ و توزیع پیشین توام (μ, r) توزیعی با تابع چگالی

$$f(\mu, r) \propto \frac{\theta^{r-1} r(r\mu)^{rv_2 - 1} e^{-rb\mu}}{\Gamma(r)^{v_2}}, \mu > 0, r \in N,$$

فرض شوند به‌طوری‌که $\theta, b > 0$ و $v_2 \in N$ ثابت‌های معلوم و $\theta \left(\frac{v_2}{b}\right)^{v_2} < 1$ باشند، آنگاه تابع احتمال r به‌صورت

$$(r) \propto \frac{\Gamma(rv_2)}{\Gamma(r)^{v_2}} \left(\frac{\theta}{b^{v_2}}\right)^{r-1}, r = 1,2, \ldots.$$

به‌دست آورده می‌شود (ویپر [3]). با فرض $v_2 = 1$ و $\theta < b$ توزیع r، هندسی با پارامتر $1 - \frac{\theta}{b}$ است که در این مقاله درنظر گرفته می‌شود.

$$P(r) = \left(1 - \frac{\theta}{b}\right)\left(\frac{\theta}{b}\right)^{r-1}, r = 1,2, \ldots.$$

در سیستم صف‌بندی $M / E_r / 1$، $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ پارامتر شدت ترافیک سیستم نام دارد که تحت شرط $\rho < 1$ پایا است (اینسوا وهمکاران [4]). ازآنجایی‌که حالت پایایی، ویژگی مهم هر سیستم صف‌بندی هست، بنابراین، اطلاع داشتن مقدار متوسط ρ تحت شرط $\rho < 1$ ضروری است که از رابطه

$$E(\rho | \rho < 1) = \frac{bv_1}{av_2 P_\rho} \sum_{r-1}^{\infty} P(r) \left(1 - \frac{1}{rv_2}\right)^{-1} \left[1 - \sum_{i=0}^{v_1} \binom{rv_2 + i - 2}{i} P_r^{rv_2 - 1} (1 - P_r)^i\right]. \quad (۱)$$

به‌دست آورده می‌شود [15]، طوری که $P_r = \frac{rb}{a + rb}$ و

$$P_\rho = P(\rho < 1) = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} P(r) \sum_{i=1}^{v_1-1} \binom{rv_2 + i - 1}{i} P_r^{rv_2}(1 - P_r)^i.$$

البته

$$P_{\rho|r} = P(\rho < 1|r) = 1 - \sum_{i=1}^{v_1-1} \binom{rv_2 + i - 1}{i} P_r^{rv_2}(1 - P_r)^i. \quad (۲)$$

همچنین توزیع تعداد مشتریان موجود در سیستم در حالت پایا با توجه به آلن [15] عبارت است از

$$P_n = (1-\rho)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\tau^{n-i-1}}{(1-\tau)^{ri}}\left[\binom{ri}{n-i}\tau + \binom{ri}{n-i-1}\right], n \geq 0, \quad (۳)$$

که در آن $\tau = \rho/(\rho + r)$ است.

اکنون برای محاسبه متوسط تعداد مشتری‌های موجود در صف (L_q) و در سیستم (L_s) به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. اگر X_1، X_2، ...، X_j،.... یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند، طوری که X_j تعداد مشتری‌های وارد شده به سیستم تا سرویس jth باشد، آنگاه با استفاده سرینیواس و همکاران [16] تابع احتمال $X_j s$ به‌صورت

$$P(X = x) = \binom{x + r - 1}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda + r\mu}\right)^x \left(\frac{r\mu}{\lambda + r\mu}\right)^r, x = 0,1,2, \ldots,$$

است که با فرض $p = \frac{r\mu}{\lambda + r\mu}$ دارای توزیع دوجمله‌ای منفی $NB(r,p)$ می‌شود. اکنون بعضی از معیارهای ارزیابی این سیستم صف‌بندی مانند متوسط تعداد متقاضیان در سیستم و صف و متوسط مدت‌زمان انتظار در سیستم و صف متقاضیان به‌دست آورده می‌شود. با کمی محاسبات جبری

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}, L_q = \frac{r^r - (1-\rho)(r+\rho)^r}{(r+\rho)^r}, \quad (۴)$$

محاسبه می‌شوند. همچنین با استفاده از فرمول‌های لیتل متوسط مدت‌زمان انتظار در صف و سیستم هر مشتری به‌صورت

$$W_q = \frac{r^r - (1-\rho)(r+\rho)^r}{\lambda(r+\rho)^r}, W_s = \frac{1}{\mu}, \quad (۵)$$

به دست می‌آیند.

همچنین در این مقاله زمان توقف سیستم T یعنی تا زمانی که سیستم فعال است، درنظر گرفته می‌شود. با فرض $A(T)$ به‌عنوان تعداد مشتری‌های واردشده به سیستم و $B(T)$ تعداد مشتری‌های سرویس‌شده و $\gamma(T)$ کل اوقات سپری‌شده سرویس‌دهنده تا زمان T، سینگ و اچاریا [17] چهار حالت برای T درنظر گرفته که عبارت‌اند از

۱. اگر سیستم تا زمان مشخص t فعال باشد، واضح است که $T = t$.

۲. اگر سیستم تا موقعی کار کند که d متقاضی سرویس شود یعنی $B(T) = d$، در این حالت

$$T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^{d} V_i.$$

۳. اگر سیستم تا موقعی کار کند که m مشتری به سیستم وارد شده باشند یعنی $A(T) = m$، در این حالت

$$T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^{m} U_i.$$

۴. اگر سیستم تا موقعی کار کند که n مشتری در سیستم باشد یعنی $A(T) + B(T) = n$، در این T یک متغیر تصادفی هست.

۳- مفاهیم اساسی

در این بخش تابع هزینه، متوسط درجه رضایت مشتری، شاخص ارزیابی عملکرد سیستم (ORS) معرفی و نحوه بهینه‌سازی خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ توضیح داده می‌شود.

۳-۱- تابع هزینه

در هر سیستم صف‌بندی، هدف کاهش طول صف و زمان انتظار متقاضی و افزایش رضایت مشتری است. وقت مشتری از نظر اجتماعی-اقتصادی ارزش دارد و اتلاف آن هزینه محسوب می‌شود. به‌طورکلی در یک سیستم صف‌بندی امید ریاضی کل هزینه‌ها در واحد زمان معیاری برای ارزیابی سیستم هست که هزینه‌ها بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. در این مقاله به دلیل مهم بودن زمان انتظار مشتری، تابع هزینه به‌صورت

$$C(r) = C_1 L_q + C_2(L_s - L_q). \qquad (۶)$$

پیشنهاد می‌شود که در آن

۱. $C_1 L_q$، هزینه اتلاف وقت مشتری‌ها در صف تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر مشتری در صف C_1 در متوسط تعداد مشتری‌ها در صف یعنی L_q است.

۲. $C_2(L_S - L_q)$، هزینه اتلاف وقت مشتری‌ها در هنگام دریافت خدمت تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر مشتری در حال دریافت خدمت C_2 در متوسط تعداد مشتری‌ها در حال دریافت خدمت یعنی $C_2(L_s - L_q)$ است. بنابراین با توجه به **رابطه (٤)** و **رابطه (٦)** به‌صورت

$$C(r) = \frac{(C_1 - C_2)r^r + (C_1\rho + C_2 - C_1)(r+\rho)^r}{(r+\rho)^r}. \qquad (۷)$$

نوشته می‌شود.

۳-۲- متوسط درجه رضایت مشتری

روشی توسط پرادو و لفانته [18] برای محاسبه درجه رضایت مشتری با مشاهده طول صف در لحظه ورود به سیستم ارایه شد. اگر مشتری در لحظه ورودش با صف با طول‌های کوتاه، متوسط و بلند روبرو شود، درجه رضایت آن به ترتیب بالا (a_1) متوسط (a_2) و پایین (a_3) خواهد بود $(a_1 \geq a_2 \geq a_3)$. صف‌های اشاره‌شده به دلیل نسبی بودن اصطلاحات کوتاه، متوسط و بلند توسط آن‌ها به‌صورت مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ (صف کوتاه)، $\tilde{B}$ (صف متوسط) و $\tilde{C}$ (صف بلند) به صورت‌های

$$\tilde{A} = \{(0, \mu_{\tilde{A}}(0)), (1, \mu_{\tilde{A}}(1)), \dots, (n, \mu_{\tilde{A}}(n))\}.$$

$$\tilde{B} = \{(0, \mu_{\tilde{B}}(0)), (1, \mu_{\tilde{B}}(1)), \dots, (n, \mu_{\tilde{B}}(n))\}.$$

$$\tilde{C} = \{(0, \mu_{\tilde{C}}(0)), (1, \mu_{\tilde{C}}(1)), \dots, (n, \mu_{\tilde{C}}(n))\}.$$

درنظر گرفته شدند که $\mu_{\tilde{A}}$، $\mu_{\tilde{B}}$ و $\mu_{\tilde{C}}$ به ترتیب مجموعه فازی‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ هستند. با توجه به دابویس [19]

$$\mu_{\tilde{A}}(i) + \mu_{\tilde{B}}(i) + \mu_{\tilde{C}}(i) = 1, i = 1,2, \dots, n.$$

البته همچنین $\mu_{\tilde{A}}(i)$ درجه عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ وقتی‌که i مشتری در صف است را نشان می‌دهد.

اگر (Ω, F, P) یک فضای احتمال باشد به‌طوری‌که Ω فضای نمونه، F یک سیگما جبر روی Ω و P نیز یک اندازه احتمال درنظر گرفته شوند، آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ در Ω یک پیشامد فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۲ (زاده [20])- اگر به ازای هر $\omega\in\Omega$، $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$ تابع عضویت پیشامد فازی $\tilde{A}$ باشد، آنگاه تابع احتمال $\tilde{A}$ به‌صورت

$$P(\tilde{A})=\sum_{\omega\in\Omega}\mu_{\tilde{A}}(\omega)P_{\omega}\,,\mu_{\tilde{A}}(\omega):\Omega\to[0,1],$$

تعریف می‌شود.

بنابراین، با توجه به **تعریف ۲**، احتمال روبرو شدن یک مشتری در حال وارد شدن به سیستم با صف به طول‌های کوتاه، متوسط و بلند به‌صورت

$$\pi(\tilde{A})=\sum_{i=0}^{n}\mu_{\tilde{A}}(i)P_i\,,\pi(\tilde{B})=\sum_{i=0}^{n}\mu_{\tilde{B}}(i)P_i\,,\pi(\tilde{C})=\sum_{i=0}^{n}\mu_{\tilde{C}}(i)P_i, \qquad (۸)$$

هستند؛ بنابراین، متوسط درجه رضایت مشتری ۱ به‌صورت

$$ADCS=a_1\pi(\tilde{A})+a_2\pi(\tilde{B})+a_3\pi(\tilde{C}), \qquad (۹)$$

تعریف می‌شود.

۳-۳- بهینه‌سازی در خانواده مدل‌های $\{\mathbf{M/E_r/1\,,r\in N}\}$

در هر سیستم صف‌بندی حالت پایایی ویژگی مهمی است که تلاش می‌شود شرایطی فراهم گردد تا سیستم در وضعیت پایا قرار گیرد. از طرفی در دنیای امروز هزینه به‌عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل تصمیم‌گیری به شمار می‌آید که بهینه کردن آن نقش مهمی در عملکرد مطلوب سیستم‌های صف‌بندی دارد. از طرفی افزایش میزان رضایت مشتری از سیستم نیز بسیار حایز اهمیت است؛ بنابراین، سیستمی مدنظر است که هزینه آن کمترین مقدار و احتمال پایایی آن و میزان رضایت مشتری، بیشترین مقدار را داشته باشد. بنابراین، برای رسیدن به این مهم ابتدا از **رابطه (۱)** مقدار $E(\rho|\rho<1)$ محاسبه شده و به‌عنوان مقداری برای ρ درنظر گرفته می‌شود. با استفاده از این مقدار ρ به ازای rs مختلف مقادیر تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم و متوسط درجه رضایت مشتری محاسبه و سپس این مقادیر نرمال‌سازی می‌شوند. برای نرمال‌سازی هزینه، کوچک‌ترین مقدار هزینه بر هریک از مقادیر آن و برای نرمال‌سازی احتمال پایایی و متوسط درجه رضایت مشتری، هریک از مقادیر آن‌ها بر بزرگ‌ترین مقدارشان تقسیم می‌شوند. مقادیر نرمال شده هزینه با نماد C_N، مقادیر نرمال‌شده احتمال پایایی با نماد P_N و مقادیر نرمال‌شده متوسط درجه رضایت مشتری با نماد A_N نشان داده می‌شود. برای تعیین سیستم بهینه، با درنظر گرفتن هر سه معیار هزینه سیستم نرمال شده، احتمال پایایی نرمال شده و متوسط درجه رضایت مشتری نرمال شده، شاخصی جدید به‌عنوان نرخ کارایی سیستم ۱ به‌صورت

$$ORS=w_1C_N+w_2P_N+w_3A_N, w_1+w_2+w_3=1, \qquad (۱۰)$$

پیشنهاد می‌شود که w_1، w_2 و w_3 به ترتیب وزن معیارهای هزینه نرمال شده، احتمال پایایی نرمال شده و متوسط درجه رضایت مشتری نرمال شده هستند. شاخص تصمیم‌گیری ORS با هر سه معیار نرمال‌شده فوق ارتباط مستقیم دارد، بدین‌صورت که هرچقدر هزینه سیستم پایین‌تر و احتمال پایایی سیستم و متوسط درجه رضایت مشتری بالاتر باشد، ORS مقدار بالاتری می‌شود؛ بنابراین، مقداری از r که بالاترین مقدار ORS را دارد به‌عنوان r_{Opt} انتخاب شده و سیستم مربوط به آن سیستم بهینه نامیده می‌شود

۴- تجزیه‌وتحلیل عددی

در این بخش برای خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1\,,r\in N\}$ مدل بهینه تعیین می‌شود؛ بنابراین، برای رسیدن به این هدف مراحل زیر طی می‌شود.

۱. با استفاده از **رابطه (۱)** و به ازای $v_1=12$، $v_2=1$، $a=4$، $b=7$ و $\theta=5$ مقدار $E(\rho|\rho<1)=0.498$ به‌دست آورده می‌شود که به عنوان مقدار ρ درنظر گرفته می‌شود.

۲. بدن آن‌که به کلیت مساله خللی وارد شود فرض می‌شود تا وقتی‌که تعداد مشتری‌های موجود در سیستم ۱۰ است، سیستم فعال باشد؛ بنابراین، به ازای $\rho=0.498$ و به ازای rs مختلف، با استفاده از **رابطه (۳)** احتمال تعداد مشتری‌های موجود در سیستم به ازای $n=0,1,\dots,10$ به‌دست آورده می‌شود که در **جدول ۱** ثبت شده است.

با فرض

$$\tilde{A} = \{(0,0.6), (1,0.5), (2,0.7), (3,0.8), (4,0.9), (5,0.2), (6,0), (7,0.4)$$

$$, (8,0.8), (9,0.4), (10,0),$$

$$\tilde{B} = \{(0,0.3), (1,0.3), (2,0.2), (3,0.1), (4,0.1), (5,0.1), (6,1), (7,0.5)$$

$$, (8,0.1), (9,0.5), (10,0.2),$$

$$\tilde{C} = \{(0,0.1), (1,0.2), (2,0.1), (3,0.1), (4,0.1), (5,0.1), (6,0), (7,0.1)$$

$$, (8,0.1), (9,0.1), (10,0.8),$$

با استفاده از **رابطه (۸)** و با استفاده از **جدول ۱**، احتمال مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ به ازای rs مختلف محاسبه شده که در **جدول ۲** ثبت شده است.

۳. به ازای $\rho = 0.498$، $C_1 = 350$، $C_2 = 300$ و با استفاده از **رابطه (۷)** مقدار تابع هزینه، با استفاده از **رابطه (۲)** احتمال پایایی، با فرض $a_1 = 1$، $a_2 = 0.65$ و $a_3 = 0.45$، با استفاده از **جدول ۲** و **رابطه (۹)** متوسط درجه رضایت مشتری و با فرض $w_1 = 0.6$، $w_2 = 0.3$، $w_3 = 0.1$ و به کمک **رابطه (۱۰)** شاخص ORS به ازای rs مختلف محاسبه شده و در **جدول ۳** ثبت شده‌اند.

جدول ۱- احتمال تعداد مشتری‌های موجود در سیستم تا $n = 10$ به ازای rs مختلف.

Table 1- Probability of the number of customers in the system up to n=10 for different r.

n	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	r = 7	r = 8
0	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020
1	0.7519	0.7831	0.7958	0.8027	0.8070	0.8099	0.8121	0.8138
2	0.1245	0.1263	0.1258	0.1253	0.1248	0.1245	0.1242	0.1239
3	0.1036	0.0533	0.0489	0.0464	0.0448	0.0436	0.0429	0.0422
4	0.0129	0.0199	0.0184	0.0166	0.0154	0.0146	0.0141	0.0137
5	0.0084	0.0111	0.0069	0.0058	0.0052	0.0048	0.0046	0.0044
6	0.0034	0.0036	0.0025	0.0021	0.0017	0.0016	0.0015	0.0014
4	0.0029	0.0014	0.0009	0.0007	0.0006	0.0005	0.00047	0.00044
8	0.0022	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.00017	0.00015	0.00014
9	0.0012	0.0002	0.0001	0.00008	0.00006	0.000057	0.000049	۰0.000045
10	0.0010	0.00009	0.00004	0.00003	0.00002	0.000018	0.000016	0.000014

جدول ۲- احتمال مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ برای rs مختلف.

Table 2- Probability of fuzzy sets $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, and $\tilde{C}$ for different r.

r = 8	r = 7	r = 6	r = 5	r = 4	r = 3	r = 2	r = 1	π(.)
0.8421	0.8424	0.8428	0.8432	0.8440	0.8449	0.8451	0.8631	π($\tilde{A}$)
0.4285	0.4284	0.4281	0.4278	0.4277	0.4273	0.4284	0.4229	π($\tilde{B}$)
0.2315	0.2313	0.2310	0.2307	0.2230	0.2295	0.2282	0.2269	π($\tilde{C}$)

جدول ۳- مقادیر معیارهای مربوط به تعیین مدل بهینه برای خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1 , r \in N\}$.

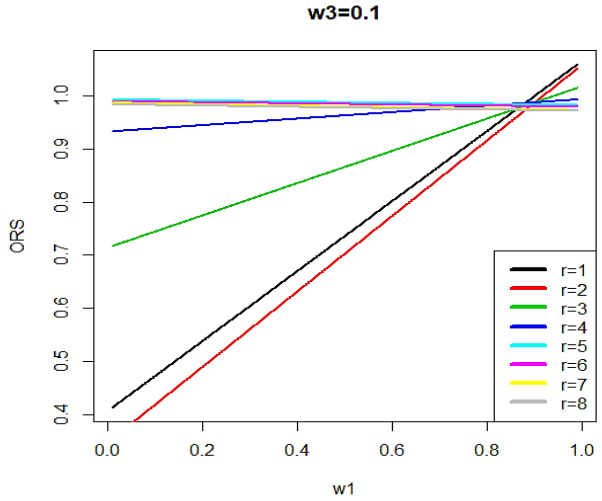
Table 3- Values of criteria related to determining the optimal model for the family of models $\{M/E_r/1 , r \in N\}$.

ORS	A_N	P_N	C_N	ADCS	$P_{\rho\|r}$	C(r)	r
0.8019	1	0.34030	0.9994	1.2400	0.3403	157.7	1
0.7748	0.9865	0.27510	0.9949	1.2233	0.2751	156.4	2
0.8974	0.9862	0.68211	0.9987	1.2229	0.6821	155.8	3
0.9703	0.9858	0.92451	1	1.2224	0.9245	155.6	4
0.9877	0.9880	0.99861	0.9407	1.2251	0.9886	165.4	5
0.9753	0.9879	0.99881	0.9084	1.2250	0.9988	171.3	6
0.9665	0.9858	0.99992	0.8683	1.2249	0.99991	179.2	7
0.9611	0.9877	1	0.8361	1.2248	0.99999	186.1	8

با توجه به مقادیر ORS در **جدول ۳** نتیجه گرفته می‌شود که مدل M/E_5 / 1 در خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1 , r \in N\}$ مدل بهینه است. البته به ازای w_1 و w_2 و w_3 مختلف، نتایج متفاوت به‌دست آید. اکنون با درنظر گرفتن $w_3 = 0.1$ و بازنویسی **رابطه (۱۰)** به‌صورت

$$ORS = w_1C_N + (1 - w_1 - w_3)P_N + w_3A_N.$$

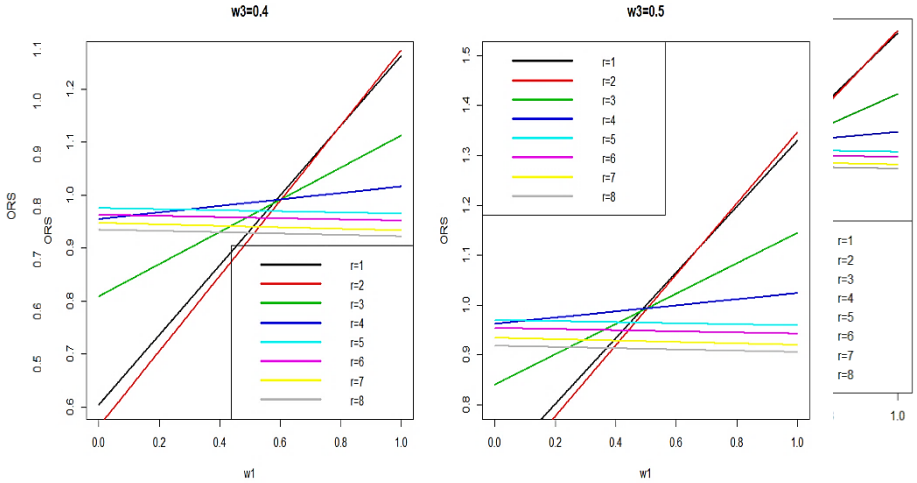
نمودار ORS برحسب w_1 رسم شده است (**شکل ۲**) که نشان می‌دهد وقتی‌که $0 < w_1 \leq 0.9$ است، مدل $M/E_5\,/\,1$ بهتر است که با نتیجه گرفته‌شده در **جدول ۳** یکسان است.



شکل ۲- نمودار شاخص ORS برحسب w_1 به ازای $w_3 = 0.1$.

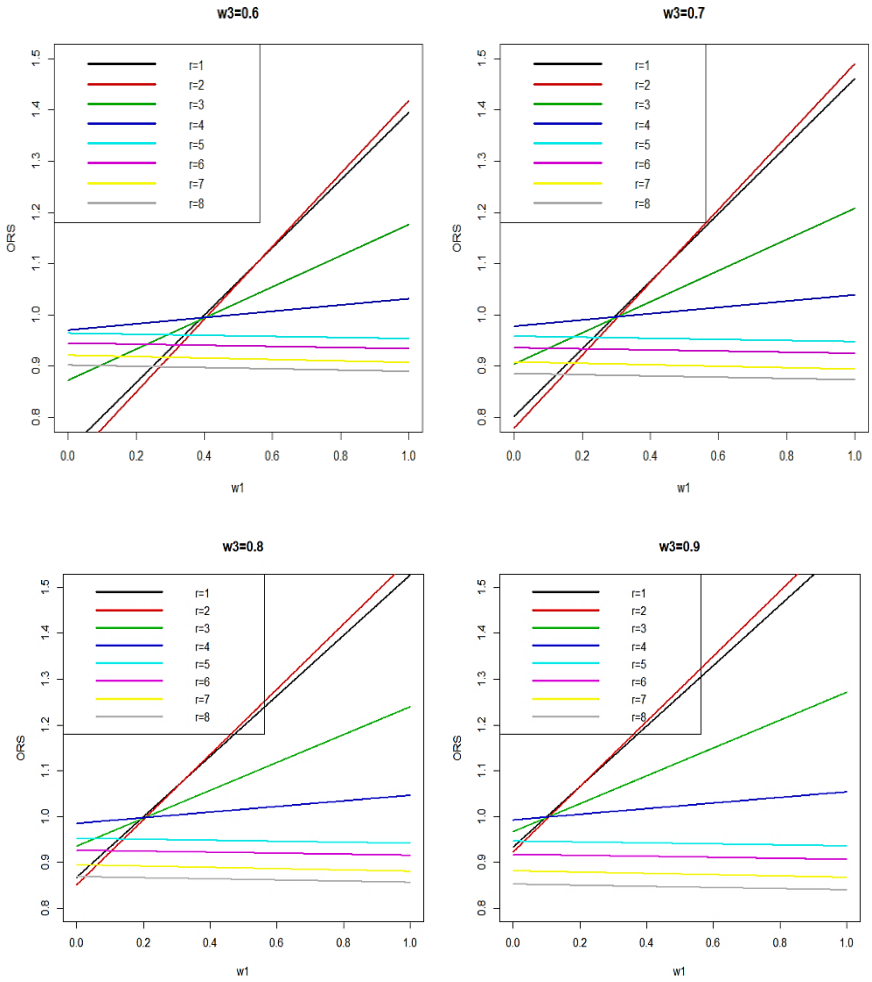
Figure 2- ORS index graph in terms of w_1 for w_3=0.1.

اکنون به ازای w_3th متفاوت نمودار ORS برحسب w_1 رسم شده است.



شکل ۳- نمودارهای شاخص ORS برحسب w_1 به ازای $w_3 = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

Figure 3- ORS index graphs in terms of w_1 for w_3=0.2, 0.3, 0.4, 0.5.



شکل ۴- نمودارهای ORS برحسب w_1 به ازای $w_3 = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

Figure 4- ORS plots in terms of w_1 for w_3=0.6, 0.7, 0.8 ,0.9.

با توجه به نمودارهای موجود در **شکل‌های ۲** تا **۴** و تحت شرط روی w_1 نتایج برای انتخاب مدل بهینه در **جدول ۳** ارایه شده است.

جدول ۴- نتایج انتخاب مدل بهینه به ازای w_3th مختلف.

Table 4- Results of selecting the optimal model for different w_3.

$w_3 = 0.1$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.9$ مدل	$M/E_5/1$	و به ازای $0.9 < w_1 < 1$ مدل $M/E_1/1$
$w_3 = 0.2$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.9$ مدل	$M/E_5/1$	و به ازای $0.9 < w_1 < 1$ مدل $M/E_1/1$
$w_3 = 0.3$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.4$ مدل	$M/E_5/1$	و به ازای $0.4 < w_1 \leq 0.7$ مدل $M/E_4/1$ و به ازای $0.7 < w_1 < 1$ مدل $M/E_1/1$
$w_3 = 0.4$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.3$ مدل	$M/E_5/1$	و به ازای $0.3 < w_1 \leq 0.7$ مدل $M/E_4/1$ و به ازای $0.7 < w_1 < 1$ مدل $M/E_2/1$
$w_3 = 0.5$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$ مدل	$M/E_5/1$	و به ازای $0.1 < w_1 \leq 0.5$ مدل $M/E_4/1$ و به ازای $0.5 < w_1 < 1$ مدل $M/E_2/1$
$w_3 = 0.6$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.4$ مدل	$M/E_4/1$	و به ازای $0.4 < w_1 < 1$ مدل $M/E_2/1$
$w_3 = 0.7$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.3$ مدل	$M/E_4/1$	و به ازای $0.3 < w_1 < 1$ مدل $M/E_2/1$
$w_3 = 0.8$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.2$ مدل	$M/E_4/1$	و به ازای $0.2 < w_1 < 1$ مدل $M/E_2/1$
$w_3 = 0.9$	به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$ مدل	$M/E_4/1$	و به ازای $0.1 < w_1 < 1$ مدل $M/E_2/1$

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برای خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ با زمان‌های بین ورود دارای توزیع نمایی و با زمان‌های سرویس دارای توزیع ارلانگ، تابع هزینه و معیاری به نام متوسط درجه رضایت مشتری تعریف و شاخصی وزنی به نام شاخص *ORS* برحسب تابع هزینه، احتمال پایایی و متوسط

درجه رضایت مشتری برای ارزیابی عملکرد سیستم معرفی شد، تا به کمک آن مدل بهینه تعیین شود. مدل بهینه، مدلی است که به ازای rs مختلف دارای شاخص ORS بزرگ‌تری باشد. در پایان نیز به کمک تحلیل عددی به ازای مقادیر مختلف وزن‌های شاخص ORS، مدل بهینه تعیین گردید که از روش نموداری برای تعیین مدل بهینه استفاده شد. همچنین برای یک مجموعه وزن‌های خاص نیز هم از روش نموداری و هم از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده شد و مدل $M\ /\ E_5\ /\ 1$ به‌عنوان مدل بهینه تعیین شد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از دقت نظر هیات تحریریه و داوران گرامی و از رهنمودهای ارزشمند آنان که نقش بسزایی در ارتقای کیفیت مقاله داشت، سپاسگزارند.

منابع

[1] Gupta, P. L. (1982). Structural properties and estimation in m| EK| 1 queue. *Communications in statistics-theory and methods*, *11*(6), 711–719. https://doi.org/10.1080/03610928208828264

[2] Fischer, M. J. (1974). The waiting time in the E k/M/1 queuing system. *Operations research*, *22*(4), 898–902. https://doi.org/10.1287/opre.22.4.898

[3] Wiper, M. P. (1998). Bayesian analysis of Er/M/1 and Er/M/c queues. *Journal of statistical planning and inference*, *69*(1), 65–79. https://doi.org/10.1016/S0378-3758(97)00124-9

[4] Insua, D. R., Wiper, M., & Ruggeri, F. (1998). Bayesian analysis of M/Er/1 and M/H_k/1 queues. *Queueing systems*, *30*(3), 289–308. https://doi.org/10.1023/A:1019173206509

[5] Harishchandra, K., & Subba Rao, S. (1988). A note on statistical inference about the traffic intensity parameter in M|| 1 queue. *Sankhyā: the Indian journal of statistics, series b*, *50*(1), 144–148. https://www.jstor.org/stable/25052531

[6] Jain, M., & Dhyani, I. (2001). Control policy for M/Ek/1 queueing system. *Journal of statistics and management systems*, *4*(1), 73–82. https://doi.org/10.1080/09720510.2001.10701028

[7] Chowdhury, S., & Maiti, S. S. (2014). Bayesian estimation of traffic intensity in an M/Er/1 queueing model. *Research & reviews: journal of statistics*, *1*, 99–106. https://www.researchgate.net/profile/Sudhansu-Maiti/publication/297849479_Bayesian_Estimation_of_Traffic_Intensity_in_an_MEr1_Queueing_Model/links/56e3d71108ae98445c1e7a90/Bayesian-Estimation-of-Traffic-Intensity-in-an-M-Er-1-Queueing-Model.pdf

[8] Jose, J. K., & Manoharan, M. (2014). Bayesian estimation of rate parameters of queueing models. *Journal of probability and statistical science*, *12*(1), 69–76. https://www.researchgate.net/profile/Joby-Jose/publication/338966261_Bayesian_Estimation_of_Rate_Parameters_of_Queueing_Models/links/5e352cb2458515072d740c3b/Bayesian-Estimation-of-Rate-Parameters-of-Queueing-Models.pdf

[9] Vaidyanathan, V. S., & Chandrasekhar, P. (2018). Parametric estimation of an M| Er| 1 queue. *Opsearch*, *55*(3), 628–641. https://doi.org/10.1007/s12597-018-0342-0

[10] Deepthi, V., & Jose, J. K. (2020). Bayesian estimation of M/E k/1 queueing model using bivariate prior. *American journal of mathematical and management sciences*, *40*(1), 88–105. https://doi.org/10.1080/01966324.2020.1835589

[11] Makhdoom, I., & Yaghoobzadeh Shahrastani, S. (2024). Bayesian estimation in the M/M/1 queueing model under a Type II censoring scheme based on fuzzy data. *Journal of statistical modelling: theory and applications*, *5*(1), 131–143. 10.22034/jsmta.2025.21733.1144

[12] Makhdoom, I., & Yaghoobzadeh Shahrastani, S. (2023). Improving the quality of M/M/m/K queueing systems using system cost function optimization. *Journal of quality engineering and management*, *13*(3), 267-280. (**In Persian**). https://doi.org/10.48313/jqem.2023.208474

[13] Makhdoom, I. (2024). A new optimum statistical estimation of the traffic intensity parameter for the M/M/1/K queuing model based on fuzzy and non-fuzzy criteria. *Journal of data science and modeling*, *2*(1), 163–184. https://jdscm.atu.ac.ir/article_17948_6c87b87f9c63c9d8151ab9d6b9576e0f.pdf

[14] Wiper, M. P. (1998). Bayesian models for correlation in M/M/1 queues. *Journal of statistical planning and inference, 69(1), 65-79*. https://doi.org/10.1016/S0378-3758(97)00124-9

[15] Allen, A. O. (2014). *Probability, statistics, and queueing theory*. Academic press. https://books.google.nl/books/about/Probability_Statistics_and_Queueing_Theo.html?id=LWniBQAAQBAJ&redir_esc=y

[16] Srinivas, V., Subba Rao, S., & Kale, B. K. (2011). Estimation of measures in M/M/1 queue. *Communications in statistics-theory and methods*, *40*(18), 3327–3336. https://doi.org/10.1080/03610926.2010.498653

[17] Singh, S. K., & Acharya, S. K. (2019). Equivalence between Bayes and the maximum likelihood estimator in M/M/1 queue. *Communications in statistics-theory and methods*, *48*(19), 4780–4793. https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1481971

[18] Pardo, M. J., & la Fuente, D. (2008). Optimal selection of the service rate for a finite input source fuzzy queuing system. *Fuzzy sets and systems*, *159*(3), 325–342. https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.05.014

[19] Dubois, D. J. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and applications* (Vol. 144). Academic press. https://books.google.nl/books/about/Fuzzy_Sets_and_Systems.html?id=JmjfHUUtMkMC&redir_esc=y

[20] Zadeh, L. A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of mathematical analysis and applications*, *23*(2), 421–427. https://doi.org/10.1016/0022-247X(68)90078-4